| السنة 1 بكالوريا علوم رياضية | مبادئ في المنطق<br>المجموعات و التطبيقات<br>حل مقترح | استعدادا لاجتياز فروضك |
|---|---|---|

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

## تمرين 1 :

**1**

لدينا $\forall(a,b)\in\left(IR^{+}\right)^{2}\quad a\le b\Rightarrow\begin{cases}a+1\le b+1\\ \sqrt{a}\le\sqrt{b}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{a+1}\le\sqrt{b+1}\\ \sqrt{a}\le\sqrt{b}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\le\sqrt{b+1}+\sqrt{b}$

بالتالي: $\forall(a,b)\in\left(IR^{+}\right)^{2}\ \sqrt{a+1}+\sqrt{a}>\sqrt{b+1}+\sqrt{b}\Rightarrow a>b$

**2**

لدينا بالنسبة لـ $n=0$ : $0^{3}-0+5^{0}-1=0=6\times0$ (العبارة صحيحة)

نفترض أن: $\exists k\in Z\quad n^{3}-n+5^{2n}-1=6k$ و نبين أن: $\exists k'\in Z\quad (n+1)^{3}-(n+1)+5^{2(n+1)}-1=6k'$

$$(n+1)^{3}-(n+1)+5^{2(n+1)}-1=n^{3}+3n^{2}+3n^{2}+1-n-1+5^{2n+2}-1=n^{3}-n+3n(n+1)+5^{2n}\times25-1$$

لدينا :

$$=6k-5^{2n}+1+3n(n+1)+25\times5^{2n}-1$$

$$=6k+3n(n+1)+24\times5^{2n}$$

و بما أن $n(n+1)$ عدد زوجي (جذاء عددين متتابعين) فإن: $n(n+1)=2a\ /\ a\in IN$

منه : $(n+1)^{3}-(n+1)+5^{2(n+1)}-1=6k+6a+24\times5^{2n}=6\left(k+a+4\times5^{2n}\right)$

نضع : $k'=k+a+4\times5^{2n}\in Z$ بالتالي : $\forall n\in IN\quad \exists k\in Z\quad n^{3}-n+5^{2n}-1=6k$

**3**

نفترض أن: $M<2$ ، إذن: $x<2$ و $y<2$ و $z<2$

منه:

$$\begin{cases}x<2\\ y<2\\ z<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+\frac{1}{b}<2\\ b+1<2\\ 1+\frac{1}{a}<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+\frac{1}{b}<2\\ b<1\\ \frac{1}{a}<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+\frac{1}{b}<2\\ \frac{1}{b}>1\\ a>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+\frac{1}{b}<2\\ \frac{1}{b}+a>2\end{cases}\Rightarrow 2<a+\frac{1}{b}<2$$

و هذا غير ممكن إذن افتراضنا خاطئ و بالتالي العبارة المطلوبة صحيحة.

**4**

لدينا: $x^{6}-x+1=x\left(x^{5}-1\right)+1$ و $x^{6}-x+1=x^{6}+1-x$

- إذا كان : $x\ge1$ ، فإن: $x\ge1\Rightarrow x^{5}\ge1\Rightarrow x^{5}-1\ge0\Rightarrow x\left(x^{5}-1\right)\ge0\Rightarrow x^{6}-x+1>0$
- إذا كان : $x<1$ ، فإن: $x<1\Rightarrow\begin{cases}1-x>0\\ x^{6}=\left(x^{3}\right)^{2}\ge0\end{cases}\Rightarrow x^{6}+1-x>0$

إذن في كل الحالات : $x^{6}-x+1>0$ ، بالتالي: $\forall x\in IR\ x^{6}-x+1>0$

**5**

لدينا : $x=y=1\ \Rightarrow\begin{cases}x^{2}+y^{2}=1+1=2\\ x+y=1+1=2\end{cases}\Rightarrow x^{2}+y^{2}=x+y=2$

و

$$x^{2}+y^{2}=x+y=2\ \Rightarrow(x-1)^{2}+(y-1)^{2}=x^{2}-2x+1+y^{2}-2y+1$$

$$\Rightarrow(x-1)^{2}+(y-1)^{2}=x^{2}+y^{2}-2(x+y)+2=2-4+2=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\\ y-1=0\end{cases}\Rightarrow x=y=1$$

بالتالي : $\forall(x,y)\in IR^{2}\qquad\left(x^{2}+y^{2}=x+y=2\ \Leftrightarrow\ x=y=1\right)$

| | |
|---|---|
| $\exists(a,b)\in(IR^+)^2 \quad \sqrt{a+1}+\sqrt{a}>\sqrt{b+1}+\sqrt{b} \;\; et \;\; a\le b$<br>$\exists n\in IN \quad \exists\forall\in Z \quad n^3-n+5^{2n}-1\neq 6k$ | 6 |

**تمرين 2 :**

▪ لدينا $A\bigcup(A\bigcap C)\bigcup(\overline{B}\bigcap A)=A$ ( لأن: $A\bigcap C\subset A$ و أيضا : $\overline{B}\bigcap A\subset A$ )

▪ لدينا: $(A\bigcup C)\setminus\overline{(C\setminus B)}=(A\bigcup C)\bigcap\overline{\overline{(C\setminus B)}}=(A\bigcup C)\bigcap(C\setminus B)=(A\bigcup C)\bigcap(C\bigcap\overline{B})=C\bigcap\overline{B}$

لأن: $C\bigcap\overline{B}\subset C\subset(A\bigcup C)$

إذا كانت مجموعة ضمن الأخرى يكون التقاطع هو المجموعة الأصغر و الاتحاد هو المجموعة الأكبر

**تمرين 3 :** نعتبر المجموعة: $K=\left\{(a,b)\in IN^*\times IN^* \,/\, \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\right\}$

| | |
|---|---|
| $(a,b)\in K \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a+2b=ab \Leftrightarrow 2a-ab+2b=0$<br>لدينا : $(a,b)\in K \Leftrightarrow a(2-b)+2b=0 \Leftrightarrow a(2-b)+2b-4+4=0 \Leftrightarrow a(2-b)+2(b-2)=-4$<br>$(a,b)\in K \Leftrightarrow (b-2)(-a+2)=-4 \Leftrightarrow (b-2)(a-2)=4$ | 1 |
| لدينا حسب السؤال السابق ، و بما أن قواسم 4 الموجبة هي 1 و 2 و 4 فإن:<br>$(a,b)\in K \Leftrightarrow (a-2,b-2)\in\{(1,4);(-1,-4);(2,2);(-2,-2)\} \Leftrightarrow (a,b)\in\{(3,6);(1,-2);(4,4);(0,0)\}$<br>بالتالي: $K=\{(3,6);\,(1,-2)\,;\,(4,4)\}$ (لأن $(0;0)\notin K$) | 2 |

**تمرين 4 :** $f: IR\to IR$, $x\mapsto \frac{x}{1+\lvert x\rvert}$

| | |
|---|---|
| لدينا: $\forall x\in IR \;\; 1-\lvert f(x)\rvert=1-\frac{\lvert x\rvert}{1+\lvert x\rvert}=\frac{1}{1+\lvert x\rvert}>0$ ، إذن: $\forall x\in IR \;\; \lvert f(x)\rvert<1$<br>منه: $\forall x\in IR \;\; f(x)\in\left]-1;1\right[$ بالتالي: $f(IR)\subset\left]-1;1\right[$<br>بما أن $2\notin\left]-1;1\right[$ و $f(IR)\subset\left]-1;1\right[$ فإن 2 لا سابق له بالتالي $f$ ليس شمولا على $IR$ | 1 |
| ليكن $(x;y)\in IR^2$ حيث $f(x)=f(y)$ إذن: $\frac{x}{1+\lvert x\rvert}=\frac{y}{1+\lvert y\rvert}$ نستنتج أن لـ $x$ و $y$ نفس الإشارة<br>إذا كانا موجبان نستنتج أن: $f(x)=f(y)\Rightarrow\frac{x}{1+x}=\frac{y}{1+y}\Rightarrow x+xy=y+xy\Rightarrow x=y$<br>إذا كانا سالبان نستنتج أن: $f(x)=f(y)\Rightarrow\frac{x}{1-x}=\frac{y}{1-y}\Rightarrow x-xy=y-xy\Rightarrow x=y$<br>بالتالي $f$ تطبيق تبايني | 2 |
| $x\in f^{-1}\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right) \Leftrightarrow f(x)\in\left[0;\frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow 0\le f(x)\le\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0\le\frac{x}{1+\lvert x\rvert}\le\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0\le 2x\le 1+\lvert x\rvert$<br>$x\in f^{-1}\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right) \Leftrightarrow \begin{cases}2x\ge 0\\ 2x\le 1+x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x\le 1\end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 1 \Leftrightarrow x\in[0;1]$<br>بالتالي : $f^{-1}\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)=[0;1]$ | 3 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | لدينا حسب السؤال الثاني $f$ تباين على $IR$<br>لنبين أنها شمول على $\left]-1;1\right[$ ، ليكن $y \in \left]-1;1\right[$ ، ولنحل المعادلة : $(E):\ f(x)=y\ ;x \in IR$<br>هذه المعادلة تكافئ : $\frac{x}{1+\lvert x\rvert}=y$ نستنتج منه أن لـ $x$ و $y$ نفس الإشارة<br>إذا كان : $y \geq 0$ فإن: $x \geq 0$ منه :<br>$(E): \Leftrightarrow \frac{x}{1+x}=y \Leftrightarrow x=y+xy \Leftrightarrow x-xy=y \Leftrightarrow x(1-y)=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}\ (y \neq 1)$<br>إذا كان : $y<0$ فإن: $x<0$ منه :<br>$(E): \Leftrightarrow \frac{x}{1-x}=y \Leftrightarrow x=y-xy \Leftrightarrow x+xy=y \Leftrightarrow x(1+y)=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1+y}\ (y \neq -1)$<br>في كل الحالات المعادلة تقبل حلا في $IR$ ، إذن ف $f$ شمول على $\left]-1;1\right[$<br>وبالتالي فهي تقابل من $IR$ نحو $\left]-1;1\right[$ وتقابلها العكسي معرف كما يلي:<br>$f^{-1}:\ \left]-1;1\right[ \to IR$<br>$x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1-x}\ ; 0 \leq x<1 \\ \frac{x}{1+x};\ -1<x<0 \end{cases}$ | |